ESPACIOS VECTORIALES

Definición de ley externa

Dados dos conjuntos E y K (a K le llamamos dominio de operadores) una ley de composición externa o ley externa es una aplicación

$$K\times E \rightarrow E$$
$$(\alpha,x) \rightarrow \alpha x$$

Definición de espacio vectorial

Sea K un cuerpo conmutativo (con leyes suma y producto cuyos elementos neutros serán 0 y 1) a cuyos elementos llamaremos escalares y los representaremos por letras griegas.

Sea E un conjunto a cuyos elementos los llamaremos vectores, denotándolos x, y, etc.

E es un **espacio vectorial** si se verifica:

1. Existe una ley de composición interna sobre E, para la cual E tiene estructura de grupo abeliano. (En lo que sigue a esta ley la llamaremos suma y el elemento neutro lo llamaremos 0).
2. Existe sobre E una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el cuerpo K con las siguientes propiedades:

$$\forall\ \lambda, \mu \in K$$
$$\forall\ x, y \in E$$

2.1. Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\lambda + \mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$$

2.2. Distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\lambda\cdot(x + y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$$

2.3. Asociatividad respecto a los escalares

$$\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\cdot\mu)\cdot x$$

2.4. Elemento neutro_

$$1\cdot x = x$$

Nota: Si no se hace mención contraria K, será el cuerpo de los números reales.

Las principales propiedades de un espacio vectorial son las siguientes:

1) $\forall x\in E, \quad 0\cdot x = 0$
2) $\forall\lambda\in K, \quad \lambda\cdot 0 = 0$
3) Si $\lambda\cdot x = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 0$ ó $x = 0$
4) $\forall\lambda\in K \ \ \forall x\in E \ \ (-\lambda)\cdot x = -\lambda\cdot x = \lambda\cdot(-x)$

Definición de sistema de vectores

Un conjunto de vectores, que nosotros supondremos finito, lo denominamos sistema de vectores representándolo $S = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

Definición de combinación lineal

Un vector $x\in E$ es una combinación lineal del sistema S cuando existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$. (Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los coeficientes de la combinación lineal)

Definición de sistema libre o ligado.

Un sistema S de vectores es libre, diciéndose también que los vectores x_1, x_2, ..., x_n son linealmente independientes, cuando:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 =. = \lambda_n = 0$$

En caso contrario el sistema S es ligado o los vectores x_1, x_2. ,x_n son linealmente dependientes.

Las principales propiedades de los sistemas libres o no ligados son las siguientes:

(i) Si $x \neq 0$, el sistema $S = \{x\}$ es libre.

(ii) Si el sistema S es libre, cualquier sistema S' extraído de él ($S' \subset S$) es libre.

(iii) Todo sistema S que contenga al vector 0 es ligado.

(iv) Si el sistema S es ligado, todo sistema S' que lo contenga ($S' \supset S$) es ligado.

(v) Si el sistema S es ligado, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

(vi) Si el sistema S es libre y el sistema $S' = S \cup \{x\}$ es ligado x es combinación lineal de los vectores de S.

Definición de L(S).

Se denomina L(S) al conjunto de vectores que son combinación lineal de vectores de S.

Definición de sistemas equivalentes.

Dos sistemas S_1 y S_2 son equivalentes sí $L(S_1) = L(S_2)$. Las principales formas para obtener un sistema equivalente a uno dado son:

- Adición al sistema de nuevos vectores que sean combinación lineal de los existentes.
- Cambiando el orden de los vectores del sistema.
- Multiplicando cualquier vector por un escalar distinto de 0.
- Sumando a un vector del sistema otro del mismo multiplicado por cualquier. escalar

Lo que se intenta es trabajar con un sistema de vectores equivalente a uno dado y más fácil de manejar.

Subespacios vectoriales

Definición. Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo subconjunto V de E,
que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes de E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que V sea subespacio vectorial de E, es que se verifique:

$$\forall\ x, y \in V;\ \lambda, \mu \in K \ \Rightarrow\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in V$$

Nota: También se utiliza la caracterización $\forall\ \overline{x},\ \overline{y} \in V$, $\forall \in K$ entonces: $\overline{x} - \overline{y} \in V$; $\lambda\ \overline{x} \in V$

Dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 son **disjuntos** sí $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Definición de intersección de subespacios vectoriales.

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in E \ /\ x \in V_1 \ \text{ y } \ x \in V_2\}$$

$V_1 \cap V_2$ es subespacio vectorial.

Definición de suma de subespacios vectoriales.

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define su suma:

$$V_1 + V_2 = \{x \in E \ /\ x = x_1 + x_2 \ /\ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

$V_1 + V_2$ es un subespacio vectorial.

Si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, la suma se llama directa y se denota $V_1 \oplus V_2$.

Si $V_1 \oplus V_2 = E$, V_1 y V_2 son subespacios complementarios.

Teorema

Si un espacio vectorial E es suma directa de dos subespacios vectoriales V_1 y V_2, todo vector de E se puede poner de forma única como suma de un vector de V_1 y otro de V_2.

Nota: La unión de subespacios vectoriales no es en general subespacio vectorial.

Definición de sistema de generadores.

Un sistema S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial de V sí L(S)=V

Nota: Las formas más usuales de dar un subespacio V suelen ser:

(a) Dando un sistema S de generadores de V, es decir L(S)=V.
(b) Dando las ecuaciones "implícitas" o "no paramétricas" que consisten en dar restricciones a las "coordenadas" de los vectores de V.
(c) Dando las ecuaciones paramétricas, que expresan las coordenadas de los vectores de V en función de parámetros que pueden tomar valores en K y elementos de K fijos.

Definición de base de un espacio vectorial.

Base de un espacio vectorial E es un sistema S de generadores de E libre.

Todo espacio vectorial admite al menos una base.

Un espacio que admite un sistema finito de generadores se dice que es de tipo finito ó finitamente generado.

Teorema

En un espacio vectorial de tipo finito todas las base son finitas y tienen el mismo número de elementos.

Al número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito, se llama **DIMENSIÓN** del espacio vectorial.

Al dividir los elementos de una base en dos conjuntos disjuntos, los espacios engendrados son suplementarios

Definición de coordenadas de un vector en una base.

Sea $B=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de E y $x\in E$. Entonces:

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ son las coordenadas del vector x en la base B

i. Las coordenadas de un vector en una base son únicas.
ii. Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del espacio.
iii. En el espacio vectorial R^n la base $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, ..., 0)$, ...,$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ se llama **base canónica**.

Definición de rango de un sistema de vectores.

El rango o característica de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio L(S) engendrado por S. De otra forma es el máximo número de vectores linealmente independientes de S.

Teorema de la base incompleta.

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y V un subespacio vectorial de E de dimensión m.

Si $B=\{c_1,c_2,...,c_m\}$ es una base de V se puede encontrar una base B' de E ampliando la de V, es decir

$$B'=\{c_1, c_2, ..., c_m, e_1, e_2, ..., e_{n-m}\}$$

Relaciones entre dimensiones.

Si V es un espacio vectorial de E $\dim V \le \dim E$.

Sí $V=\{0\}$, dimV=0.

$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$ (V_1 y V_2 subespacios vectoriales de V).

En particular $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

Definición de espacio vectorial producto.

Sean E y F espacio vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

Al conjunto E×F le denotamos de estructura de espacio vectorial con las leyes:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \quad \forall u_1, u_2 \in E \;\; v_1, v_2 \in F$$

$$\lambda(u, v)=(\lambda u, \lambda v) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall u \in E \quad \forall v \in F$$

Dicho espacio vectorial se denomina espacio vectorial producto de E y F.

Siendo $(e_1, e_2, ..., e_n)$ una base de E y $(f_1, f_2, ... , f_m)$ una base F la dimensión de E×F es n+m y una base de E×F puede ser:

$$\{(e_1, 0),(e_2, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2),... , (0, f_m)\}$$